

# Der $\lambda$ -Kalkül

Sven Eric Panitz

20. April 2019

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Der <math>\lambda</math>-Kalkül</b>	<b>1</b>
1.1. $\text{\LaTeX}$ -Darstellung . . . . .	3
1.2. Freie und gebundene Variablen . . . . .	4
1.3. Substitution . . . . .	4
1.4. $\beta$ -Reduktion . . . . .	6
<b>2. Church Numerale</b>	<b>8</b>
2.1. Codierung natürlicher Zahlen . . . . .	9
2.2. Arithmetische Operationen . . . . .	9
2.3. Rekursion durch einen Fixpunktoperator . . . . .	11
<b>3. Lernzuwachs</b>	<b>13</b>
<b>A. Reduktion der Fakultät 2</b>	<b>13</b>

## 1. Der $\lambda$ -Kalkül

Dieses Kapitel wird nur die grobe Stichpunkte der Definition des  $\lambda$ -Kalküls enthalten. Die Leser sind auf das kurze Skript von Tobias Nipkow[Nip04] verwiesen. Wer sich komplett in den  $\lambda$ -Kalkül vertiefen will, kann das in dem Standardwerk von Barendregt[Bar84].

Entworfen wurde der  $\lambda$ -Kalkül von Alonzo Church 1936 als Berechenbarkeitsmodell[Chu36]. Er ging zeitgleich mit Alan Turing der Fragestellung des Entscheidungsproblems an[Tur36] und ging einen komplett anderen Weg. Während Turing eine abstrakte Rechenmaschine entwarf, deren Hauptwesenswerk die Manipulation von Speicherzellen ist, entwarf Church einen Kalkül, ähnlich den logischen Kalkülen, mit einfachen Termen und einer einfachen Rechenoperation auf diesen Termen. Obwohl beide Ansätze komplett unterschiedlich sind, kommen sie auf die gleiche Menge berechenbarer Funktionen.

Während Turings Maschinenmodell als theoretisches Modell imperativer Programmiersprachen wie C gesehen kann, stellt Churchs  $\lambda$ -Kalkül ein theoretisches Modell der funktionalen Sprachen, angefangen bei Lisp, dar.

Wir entwerfen hingegen in dieser Aufgabe eine komplette Implementierung des  $\lambda$ -Kalküls, mit dem als Beispielapplikation tatsächlich die Fakultätsfunktion (für sehr kleine Zahlen) berechnet werden kann.

#### Haskell: LambdaCalculus

```
> module LambdaCalculus where
> import Data.List
```

Die Definition der Syntax des  $\lambda$ -Kalküls erfolgt auf strukturell induktive Weise:

#### Definition 1.1. ( $\lambda$ -Terme)

Sei gegeben eine abzählbare Menge  $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots\}$  von Variablensymbolen. Dann sei  $\Lambda$  die Menge der  $\lambda$ -Terme auch (als  $\lambda$ -Ausdrücke bezeichnet) definiert als die kleinste Menge von Wörtern mit der folgenden Eigenschaft:

- $\mathcal{V} \subseteq \Lambda$
- Wenn  $s, t \in \Lambda$  dann ist auch:  $(s\ t) \in \Lambda$ . (Anwendung)
- Wenn  $s \in \Lambda$  und  $x \in \mathcal{V}$  dann ist auch  $\lambda x.s \in \Lambda$ . (Abstraktion)

$\lambda$ -Abstraktionen stellen Funktionsdefinitionen dar, Applikationen stellen die Anwendung einer Funktion auf ein Argument dar. Es gibt nur einstellige Funktionen, die auf ein Argument angewendet werden können. Mehrstellige Funktionen sind durch Currying realisiert. Eine einstellige Funktion kann nach einer Anwendung wieder eine Funktion ergeben, die auf ein weiteres Argument angewendet werden kann.

Die Definition  $\lambda$ -Terme mündet direkt in einen entsprechenden Haskelltypen:

#### Haskell: LambdaCalculus

```
> data Lambda =
>   Var String
> | App Lambda Lambda
> | L String Lambda
> deriving (Show, Eq)
```

Es folgen ein paar erste Beispielausdrücke.

#### Haskell: LambdaCalculus

```
> id    = L "x" (Var "x")
> true  = L "x" (L "y" (Var "x"))
> false = L "x" (L "y" (Var "y"))
> wenn  = L "c"$L"a_1"$L"a_2"$ App (App (Var "c")(Var "a_1"))(Var "a_2")
```

Diese ergeben folgende  $\lambda$ -Ausdrücke:

$\text{id} = \lambda x.x$

$\text{true} = \lambda x.\lambda y.x$

$\text{false} = \lambda x.\lambda y.y$

$\text{wenn} = \lambda c.\lambda a_1.\lambda a_2.((c\ a_1)\ a_2)$

Haskell: LambdaCalculus

```
> app = foldl1 App
> w1 = app [wenn,true,Var "x",Var "y"]
> w2 = app [wenn,false,Var "x",Var "y"]
```

Diese ergeben folgende  $\lambda$ -Ausdrücke:

$((((\lambda c.\lambda a_1.\lambda a_2.((c\ a_1)\ a_2)\ \lambda x.\lambda y.x)\ x)\ y)\ x)\ y)$

$((((\lambda c.\lambda a_1.\lambda a_2.((c\ a_1)\ a_2)\ \lambda x.\lambda y.x)\ x)\ y)\ x)\ y)$

### 1.1. $\text{\LaTeX}$ -Darstellung

Allein um auch die  $\lambda$ -Terme für diese Druckversion der Aufgabe einfach darstellen zu können, sei eine kleine Typklasse definiert, die dazu dienen soll, Daten für  $\text{\LaTeX}$  darzustellen.

Haskell: LambdaCalculus

```
> class ToLaTeX a where
>   toLaTeX :: a -> String
```

Um die  $\lambda$ -Terme gut in gedruckter Form darzustellen werden sie als Instanz der Typklasse `ToLaTeX` definiert:

Haskell: LambdaCalculus

```
> instance ToLaTeX Lambda where
>   toLaTeX (Var x) = x
>   toLaTeX (App e1 e2) = "("++toLaTeX e1++"$ $ "++toLaTeX e2++")"
>   toLaTeX (L x e) = "\n\\lambda "++x++".$ $ "++toLaTeX e
```

Und auch ganze Listen von  $\lambda$ -Termen sollen für  $\text{\LaTeX}$  dargestellt werden.

Haskell: LambdaCalculus

```
> instance (ToLaTeX a) => ToLaTeX [a] where
>   toLaTeX es
>   = "\n\\tiny "++intercalate "\n\n " ["$ "++toLaTeX e++"\\\\\\n"|e<-es]
>   ++"\n\\normalsize "
```

## 1.2. Freie und gebundene Variablen

Der  $\lambda$ -Kalkül kennt Variablen. Im  $\lambda$ -Kalkül bindet das Symbol  $\lambda$  die Variablen. Variablen, die durch kein  $\lambda$ -Symbol gebunden sind, gelten als frei.

**Definition 1.2.** (freie Variablen)

Die Menge der freien Variablen eines  $\lambda$ -Terms sei definiert durch folgende Funktion  $FV$ :

- $FV(x) = \{x\}$  für  $x \in \mathcal{V}$
- $FV((s\ t)) = FV(s) \cup FV(t)$  mit  $s, t \in \Lambda$
- $FV(\lambda x. t) = FV(t) \setminus \{x\}$

### Aufgabe 1

Implementieren Sie die Funktion `freeVars`, die für einen  $\lambda$ -Term eine Liste aller freien Variablen erzeugt. Sie sollten mit drei Zeilen auskommen.

Haskell: LambdaCalculus

```
> freeVars :: Lambda -> [String]
> freeVars 1 = []
```

## 1.3. Substitution

Entscheidend für den  $\lambda$ -Kalkül ist die Substitution von freien Variablen:

**Definition 1.3.** (Substitution)

Eine Substitution  $\sigma = [x \rightarrow t]$  mit  $x \in \mathcal{V}$  und  $t \in \Lambda$  sei eine Abbildung  $\Lambda \rightarrow \Lambda$ , die in einem Term  $s$  die freien Auftreten von  $x$  durch  $t$  ersetzt. Wir schreiben  $s[x \rightarrow t]$ . Eine Substitution sei rekursiv definiert mit:

- $x[x \rightarrow t] = t$
- $y[x \rightarrow t] = y$  für  $x \neq y$
- $(s_1\ s_2)[x \rightarrow t] = (s_1[x \rightarrow t]\ s_2[x \rightarrow t])$
- $(\lambda x. s)[x \rightarrow t] = \lambda x. s$
- $(\lambda y. s)[x \rightarrow t] = \lambda x. (s[x \rightarrow t])$ , falls  $x \neq y$  und  $y \notin FV(t)$
- $(\lambda y. s)[x \rightarrow t] = \lambda z. (s[y \rightarrow z][x \rightarrow t])$ , falls  $x \neq y$  und  $z \notin FV(t) \cup FV(s)$

Die letzten beiden Punkte der Definition sollen verhindern, dass durch die Anwendung einer Substitution eine Variable sozusagen aus Versehen gebunden wird. Hierfür soll die Umbenennung einer Variabel im letzten Punkt sorgen.

Man beachte, dass nach dieser Definition eine Substitution im  $\lambda$ -Kalkül genau eine Variable substituiert. Anders als in der Prädikatenlogik, in der beliebig viele Variablen substituiert wurden.

Es folgt die Haskellimplementierung der Substitution.

Laut Definition gibt es sechs unterschiedliche Fälle:

Der erste beiden Fälle sind die Substitution einer einzelnen Variablen. Entweder ist es die zu ersetzende Variable:

Haskell: LambdaCalculus

```
> sub x1 arg v@(Var x2)
> |x1==x2 = arg
```

Andernfalls wird sie nicht verändert:

Haskell: LambdaCalculus

```
> |otherwise = v
```

Im Falle einer Anwendung, der dritte Fall, ist die Substitution auf beider Unterterme anzuwenden:

Haskell: LambdaCalculus

```
> sub x arg (App e1 e2) = App (sub x arg e1)(sub x arg e2)
```

Der komplizierte Fall ist die Substitution für einen Abstraktions-Ausdruck. Wenn die zu substituierende Variable durch das  $\lambda$  gebunden wird, gibt es nichts zu substituieren:

Haskell: LambdaCalculus

```
> sub x1 arg l@(L x2 body)
> |x1==x2 = l
```

Wenn die Variable, die durch das  $\lambda$  gebunden wird, in den freien Variablen des Substituts auftritt, wird es kompliziert. Wir brauchen eine frische Variable für die  $\lambda$ -Abstraktion

Haskell: LambdaCalculus

```
> |x2 `elem` (freeVars arg)
>   = let (newVar:_) = freshVars (App body arg)
>     in L newVar (sub x1 arg (sub x2 (Var newVar) body))
```

Wenn es keine solche Kollision mit den freien Variablen des Substituts und der in der  $\lambda$ -Abstraktion gebundene Variable gibt, kann die Substitution gefahrlos auf dem Rumpf der Abstraktion durchgeführt werden.

Haskell: LambdaCalculus

```
> |otherwise = (L x2 (sub x1 arg body))
```

Um frische Variablen zu bekommen, sei eine Liste von indizierten Variablen definiert.

Haskell: LambdaCalculus

```
> allVars = ["x_{++show n++}" | n <- [1,2..]]
```

Als frische Variable für einen Term nehmen wir die erste aus dieser Liste, die nicht als freie Variable in diesem Term vorkommt.

Haskell: LambdaCalculus

```
> freshVars e = [v | v <- allVars, not (v `elem` freeVars e)]
```

## 1.4. $\beta$ -Reduktion

Mit diesen Begriffen lässt sich der Ableitungsschritt für den  $\lambda$ -Kalkül definieren. Er wird als  $\beta$ -Reduktion bezeichnet. Die  $\beta$ -Reduktion erzeugt aus einem  $\lambda$ -Term einen neuen Term:

**Definition 1.4.** ( $\beta$ -Reduktion)

Die  $\beta$ -Reduktion im Zeichen  $\rightarrow_\beta$  sei die kleinste Relation auf  $\Lambda$  mit folgenden Eigenschaften:

- $(\lambda x.s \ t) \rightarrow_\beta s[x \rightarrow t]$ .
- Wenn  $s_1 \rightarrow_\beta s_2$  dann auch  $(s_1 \ t) \rightarrow_\beta (s_2 \ t)$  für alle  $t \in \Lambda$
- Wenn  $s_1 \rightarrow_\beta s_2$  dann auch  $(t \ s_1) \rightarrow_\beta (t \ s_2)$  für alle  $t \in \Lambda$
- Wenn  $s_1 \rightarrow_\beta s_2$  dann auch  $\lambda x.s_1 \rightarrow_\beta \lambda x.s_2$

Die  $\beta$ -Reduktion ist die einzige Rechenregel des  $\lambda$ -Kalküls.

### Aufgabe 2

Überlegen Sie, inwiefern die bereits definierten  $\lambda$ -Ausdrücke **wenn**, **true** und **false** ihre Namen zu recht tragen.

Der Subterm eines  $\lambda$ -Terms, an dem eine  $\beta$ -Reduktion möglich ist, wird als Redex (kurz für *reducible expression*) bezeichnet.

Im  $\lambda$ -Kalkül wird nun per Anwendung der Reduktionsregel der Wert eines  $\lambda$ -Ausdruckes ausgerechnet. Ein  $\lambda$ -Term, auf dem kein Reduktionsschritt mehr angewendet werden

kann, der also keinen Redex mehr enthält, wird als Normalform bezeichnet. Die Normalform eines  $\lambda$ -Terms stellt quasi das Ergebnis oder den Wert des Terms dar.

Ein  $\lambda$ -Ausdruck kann mehrere Redex enthalten. Man unterscheidet zwei Strategien, wie gewählt wird, welcher Redex als nächster für die  $\beta$ -Reduktion verwendet wird:

- Wird immer der Redex reduziert, der als erster beginnt, dann spricht man von der normalen Auswertungsreihenfolge,
- Wird immer der Redex reduziert, der als erster endet, dann spricht man von der applikativen Auswertungsreihenfolge.

Programmiersprachlich bedeutet das. Bei der applikativen Auswertungsreihenfolge werden erst alle Argumente ausgewertet, bevor sie in der Funktionsanwendung für die formalen Parameter eingesetzt werden. Dieses machen die meisten Programmiersprachen.

Bei der normalen Auswertungsreihenfolge, wird als erstes die Argumente in die Funktionsdefinition eingesetzt. Dieses machen nur die Programmiersprachen, die als lazy bezeichnet werden, wie Haskell.

Da die  $\beta$ -Reduktion eine konfluente Relation ist, ist, sofern ein  $\lambda$ -Ausdruck eine Normalform besitzt, diese eindeutig.

**Beispiel 1.5.** *Eine kleine Beispielreduktion eines  $\lambda$ -Terms:*

$$\begin{aligned} & (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) \ \lambda x. \lambda y. x) \ x) \ y) \\ & ((\lambda a_1. \lambda a_2. ((\lambda x. \lambda y. x \ a_1) \ a_2) \ x) \ y) \\ & (\lambda a_2. ((\lambda x_1. \lambda y. x_1 \ x) \ a_2) \ y) \\ & ((\lambda x_1. \lambda x_2. x_1 \ x) \ y) \\ & (\lambda x_2. x \ y) \\ & x \end{aligned}$$

Die  $\beta$ -Reduktion entspricht einem Funktionsaufruf einer Funktion, wie man ihn auch aus herkömmlichen Programmiersprachen kennt. Auch dort wird der formale Parameter durch das konkrete Argument ersetzt.

### Aufgabe 3

Implementieren Sie eine Funktion `reduce`, die eine  $\beta$ -Reduktion für einen  $\lambda$ -Ausdruck durchführt. Das Ergebnis sei ein Paar aus einem Wahrheitswert, der anzeigt, ob im Argument ein Redex war und dem  $\lambda$ -Ausdruck der durch einen  $\beta$ -Reduktionsschritt entstanden ist.

Führen Sie die Reduktion immer auf der Redex durch, der als erstes beginnt, d.h. reduzieren Sie in normaler Auswertungsreihenfolge..

Die fünf unterschiedlichen Fälle sind bereits als Pattern definiert.

Haskell: LambdaCalculus

```
> reduce :: Lambda -> (Bool, Lambda)
> reduce l@(App (L x body) arg) = (False, l)
> reduce l@(App e1 e2)          = (False, l)
> reduce l@(L x body)           = (False, l)
> reduce l@(Var x)              = (False, l)
```

Mit der Implementierung von `reduce` ist der  $\lambda$ -Kalkül in Haskell bereits vollständig implementiert.

Folgende Funktion erstellt eine Liste aller Reduktionsschritte für einen  $\lambda$ -Term. Wenn der  $\lambda$ -Term keine Normalform hat, ist die Liste unendlich.

Haskell: LambdaCalculus

```
> reduction e = map snd$takeWhile fst$iterate (reduce.snd) (True,e)
```

Wenn ein Ausdruck eine Normalform hat, so ist dieses das letzte Element der Liste der Reduktion.

Haskell: LambdaCalculus

```
> normalForm = last.reduction
```

## 2. Church Numerale

Wir sind mit dem  $\lambda$ -Kalkül angetreten, um einen Begriff der berechenbaren Funktionen zu definieren. Es soll sich dabei um Funktionen auf den natürlichen Zahlen handeln. Bisher ist noch unklar, in welcher Weise  $\lambda$ -Terme in der Lage sein sollen, natürliche Zahlen zu codieren.



## 2.1. Codierung natürlicher Zahlen

Church gibt  $\lambda$ -Terme an, die die natürlichen Zahlen repräsentieren:

$$\begin{aligned}0 &= \lambda f. \lambda x. x \\1 &= \lambda f. \lambda x. (f\ x) \\2 &= \lambda f. \lambda x. (f\ (f\ x)) \\3 &= \lambda f. \lambda x. (f\ (f\ (f\ x)))\end{aligned}$$

Es folgen die entsprechenden Terme als Haskellimplementierung:

Haskell: LambdaCalculus

```
> n0= L "f"$L "x" (Var "x")
> n1= L "f"$L "x" (App (Var "f")(Var "x"))
> n2= L "f"$L "x" (App (Var "f")(App (Var "f")(Var "x")))
> n3= L "f"$L "x" (App (Var "f")(App (Var "f")(App (Var "f")(Var "x"))))
```

Allgemein für alle Zahlen:

Haskell: LambdaCalculus

```
> n n= L "f"$L "x" $numberApp n

> numberApp 0 = Var "x"
> numberApp n = App (Var "f")(numberApp (n-1))
```

## 2.2. Arithmetische Operationen

Die Definition der einzelnen natürlichen Zahlen als  $\lambda$ -Terme ist zunächst ziemlich willkürlich und kann nur gerechtfertigt werden, wenn diese Terme im Zusammenspiel mit bestimmten Operationen das gewünschte Verhalten bringen. Wir erwarten  $\lambda$ -Terme, die es ermöglichen zwei Zahlen zu addieren oder zu multiplizieren, Vorgänger und Nachfolger zu ermitteln, oder zu testen, ob ein bestimmter  $\lambda$ -Term die Null darstellt.

Church gibt in seiner Codierung entsprechende  $\lambda$ -Terme an:

Der folgende Ausdruck kodiert die Addition:

$\text{add} = \lambda n. \lambda m. \lambda f. \lambda x. ((n\ f)\ ((m\ f)\ x))$

Man betrachte die folgende Reduktion der Addition der 1 mit 1:

$((\lambda n. \lambda m. \lambda f. \lambda x. ((n\ f)\ ((m\ f)\ x))\ \lambda f. \lambda x. (f\ x))\ \lambda f. \lambda x. (f\ x))$   
 $(\lambda m. \lambda f. \lambda x. ((\lambda f. \lambda x. (f\ x)\ f)\ ((m\ f)\ x))\ \lambda f. \lambda x. (f\ x))$   
 $\lambda f. \lambda x. ((\lambda f. \lambda x. (f\ x)\ f)\ ((\lambda f. \lambda x. (f\ x)\ f)\ x))$

$$\lambda f.\lambda x.(\lambda x.(f\ x)\ ((\lambda f.\lambda x.(f\ x)\ f)\ x))$$

$$\lambda f.\lambda x.(f\ ((\lambda f.\lambda x.(f\ x)\ f)\ x))$$

$$\lambda f.\lambda x.(f\ (\lambda x.(f\ x)\ x))$$

$$\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x))$$

Die schließlich erzielte Normalform ist die Darstellung der Zahl 2.

Der folgende Term kodiert die Multiplikation:

$$\text{mult} = \lambda n.\lambda m.\lambda f.(n\ (m\ f))$$

Der nächste Term die Vorgängerfunktion (also -1).

$$\text{pred} = \lambda n.\lambda f.\lambda x.(((n\ \lambda g.\lambda h.(h\ (g\ f))))\ \lambda u.x)\ \lambda u.u)$$

Der nachfolgende Term die Nachfolgerfunktion (also +1).

$$\text{succ} = \lambda n.\lambda f.\lambda x.(f\ ((n\ f)\ x))$$

Und schließlich lässt sich mit folgenden Term testen, ob das Argument die Zahl 0 ist.

$$\text{isZero} = \lambda n.((n\ \lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x)$$

Hierbei sind die Bool'schen-Werte für wahr und falsch und die Fallunterscheidung aufgrund dieser Werte zu definieren. Der aufmerksame Leser wird dieses schon in den ersten Beispielen im Haskellcode gefunden haben.

#### Aufgabe 4

Definieren Sie die obigen  $\lambda$ -Terme in Haskell. Verwenden Sie dabei dieselben Variablenamen wie in den Definitionen.

Haskell: LambdaCalculus

```
> isZero :: Lambda
> isZero = (Var "n")

> succc  :: Lambda
> succc  = (Var "n")

> predd  :: Lambda
> predd  = (Var "n")

> add    :: Lambda
> add    = (Var "n")

> mult   :: Lambda
> mult   = (Var "n")
```

### 2.3. Rekursion durch einen Fixpunktoperator

Nachdem nun einfache Funktionen auf den natürlichen Zahlen definiert sind, ist der entscheidende Trick auf dem Weg zur Darstellung aller berechenbaren Funktionen, auch eine rekursive Berechnung darzustellen.

Der  $\lambda$ -Kalkül hat nicht wie gängige Programmiersprachen die Möglichkeit eine Funktion rekursiv zu definieren. Es wird also eine nichtrekursive Darstellung für ansonsten rekursiv definierte Funktionen benötigt.

In gängigen Programmiersprachen wird eine rekursive Funktion definiert durch:

$$f(x) = e$$

Dabei taucht im Ausdruck  $e$  in der Regel das Argument  $x$  wieder auf, aber auch das gerade definierte Funktionssymbol  $f$ .

Im  $\lambda$ -Kalkül wird der formale Parameter  $x$  durch ein  $\lambda$ -Symbol gebunden:

$$f = \lambda x. e$$

In  $e$  taucht so immer noch das Funktionssymbol  $f$  auf, das im  $\lambda$ -Kalkül nicht durch die obige Definition rekursiv definiert werden darf.

Wenn im Funktionsrumpf von der Funktion selbst gesprochen werden soll, so tun wir einmal so, als wenn uns jemand die Funktion als Argument übergibt. Der entsprechende  $\lambda$ -Ausdruck wäre also:

$$\lambda f. \lambda x. e$$

Gib mir mich selbst als Argument, dann weiß ich wie ich funktioniere. Es führt also zur Definition der rekursiven Funktion:

$$f = (\lambda f. \lambda x. e f)$$

Damit ist  $f$  also ein Fixpunkt des Ausdrucks:  $\lambda f. \lambda x. e$ .

Hierbei ist entscheidend, einen Fixpunktoperator zur Verfügung zu haben, mit der folgenden Fixpunkteigenschaft:

$$(fix\ t) = (t\ (fix\ t))$$

Denn so kann die rekursive Funktion definiert werden als:

$$f = (fix\ (\lambda f. \lambda x. e))$$

Denn es ergibt sich für einen konkreten Argumentausdruck  $e_2$  bei der Anwendung dieser Funktion auf das Argument:

$$\begin{aligned} & ((fix\ \lambda f.\lambda x.e)\ e_2) \\ \rightarrow_\beta & ((\lambda f.\lambda x.e\ (fix\ \lambda f.\lambda x.e))\ e_2) \\ \rightarrow_\beta & \lambda x.e[f \mapsto (fix(\lambda f.\lambda x.e))]e_2 \end{aligned}$$

Es ist also genau das rekursive Verhalten zu beobachten. Das Funktionssymbol  $f$  wird in der Definition wieder durch die komplette Definition ersetzt.

Und tatsächlich gibt es  $\lambda$ -Terme, die das an den Fixpunktoperator  $fix$  gewünschte Verhalten zeigen. Einer ist der sogenannte Y-Operator, mit folgender Definition:

$$Y = \lambda h.(\lambda x.(h\ (x\ x))\ \lambda x.(h\ (x\ x)))$$

Jetzt können wir beliebige rekursive Funktionen im  $\lambda$ -Kalkül definieren. In der Haskellimplementierung soll zum Abschluss die Implementierung der Fakultät als  $\lambda$ -Term stehen. Hierzu wird zunächst der Y-Operator implementiert:

#### Aufgabe 5

Definieren Sie den Y-Operator. Verwenden Sie dabei die Variablennamen der obigen Definition.

Haskell: LambdaCalculus

```
> y :: Lambda
> y = Var "x"
```

Dann folgt die Definition der Fakultät als  $\lambda$ -Ausdruck, wobei angenommen wird, dass die Funktion erst noch als Parameter  $h$  übergeben wird. Der entsprechende  $\lambda$ -Ausdruck ist:

$$\lambda h.\lambda n.(((\lambda c.\lambda a_1.\lambda a_2.((c\ a_1)\ a_2)\ (\lambda n.((n\ \lambda x.\lambda x.\lambda y.y)\ \lambda x.\lambda y.x)\ n))\ \lambda f.\lambda x.(f\ x))\ ((\lambda n.\lambda m.\lambda f.(n\ (m\ f))\ n)\ (h\ (\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((n\ \lambda g.\lambda h.(h\ (g\ f)))\ \lambda u.x)\ \lambda u.u)\ n))))))$$

Mit den bisher schon definierten  $\lambda$ -Ausdrücken lässt er sich in Haskell wie folgt definieren:

#### Haskell: LambdaCalculus

```
> facAux =  
> L"h"$L"n"$  
> app [wenn  
> ,App isZero (Var "n")  
> ,n 1  
> ,app [mult,Var "n",App (Var "h") (App predd (Var "n"))]]
```

Die Fakultät ist schließlich der Fixpunkt dieser Funktion:

#### Haskell: LambdaCalculus

```
> factorial = App y facAux
```

Dieses mündet also in folgenden  $\lambda$ -Ausdruck, der die Fakultätsfunktion vollständig und rekursionsfrei definiert:

$$(\lambda h.(\lambda x.(h (x x)) \lambda x.(h (x x))) \lambda h.\lambda n.(((\lambda c.\lambda a_1.\lambda a_2.((c a_1) a_2) (\lambda n.((n \lambda x.\lambda x.\lambda y.y) \lambda x.\lambda y.x) n)) \lambda f.\lambda x.(f x)) ((\lambda n.\lambda m.\lambda f.(n (m f)) n) (h (\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((n \lambda g.\lambda h.(h (g f))) \lambda u.x) \lambda u.u) n))))))$$

Dieser Ausdruck auf eine der entsprechenden  $\lambda$ -Terme, die die natürlichen Zahlen repräsentieren, angewendet, reduziert zu dem  $\lambda$ -Term, der die Fakultät des Arguments darstellt.

#### Aufgabe 6

Im Haskell Standardmodul `Data.Function` ist eine Funktion `fix` definiert, mit deren Hilfe Sie wie im  $\lambda$ -Kalkül eine rekursive Funktion definieren können. Lesen Sie die Dokumentation und machen ein paar Beispielaufrufe von `fix`.

### 3. Lernzuwachs

Folgende Erkenntnisse sollte sich nach Studium dieses Kurses gesammelt haben.

- der  $\lambda$ -Kalkül legt die Grundlagen für viele Aspekte der funktionalen Programmierung, wie Curryng und strikte gegenüber nicht-strikter Auswertung.
- es gibt eine nichtrekursive semantische Modellierung der Rekursion.

### A. Reduktion der Fakultät 2

Es folgt die komplette Reduktion zur Normalform der Fakultät von 2 im  $\lambda$ -Kalkül.

```
> ex = writeFile "example.tex" $toLaTeX $reduction (App factorial n2)
```

$$\begin{aligned} & ((\lambda x. \lambda y. y \lambda f. \lambda x. (f \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n \ (m \ f)) \lambda f. \lambda x. (f \ (f \ x))) ((\lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) (\lambda n. ((n \ \lambda x. \\ & \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x) \ n)) \lambda f. \lambda x. (f \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n \ (m \ f)) \ n) (h \ (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ f)) \lambda u. x) \lambda u. u) \ n)))) \\ & (x \ y) \lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) \lambda n. ((n \ \lambda x. \lambda y. x) \ y) \lambda x. \lambda y. x) \ n)) \lambda f. \lambda x. (f \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n \ (m \ f)) \\ & \ n) (h \ (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ f)) \lambda u. x) \lambda u. u) \ n)))) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ f)) \lambda u. x) \lambda u. u) \ m \ f. \lambda x. \end{aligned}$$



[illegible][illegible]

$\lambda f. \lambda x. ((((((\lambda f. \lambda x. (f (f x)) \lambda g. \lambda h. (h (g \lambda x. \lambda x. \lambda y. y)))) \lambda u. \lambda x. \lambda y. x \lambda u. u) \lambda f. \lambda x. (f x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n (m f)) (\lambda n. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x \lambda u. u) \lambda f. \lambda x. (f x))) ((\lambda x. \lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((n \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x n)) \lambda f. \lambda x. (f x))) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x \lambda u. u) n))) (x x) \lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((n \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x n)) \lambda f. \lambda x. (f x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n (m f)) (x) \lambda h. \lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x \lambda u. u) n))) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x \lambda u. u) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x \lambda u. u) \lambda f. \lambda x. (f x)))))) f))) ((\lambda x. \lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((n \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x n)) \lambda f. \lambda x. (f x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n (m f)) (x) \lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((n \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x n)) \lambda f. \lambda x. (f x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n (m f)) (x) \lambda h. \lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x \lambda u. u) n))) (x x)) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x \lambda u. u) \lambda f. \lambda x. (f x)))) f x)))$

[illegible]



$$\begin{aligned} & ((n \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x) n)) \lambda f. \lambda x. (f x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n (m f)) n) (h (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x) \lambda u. \\ & (u) n)))) (x x)) \lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((n \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x) n)) \lambda f. \lambda x. (f x)) (\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n \\ & (m f)) n) (h (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x) \lambda u. u) n)))) (x x))) (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g f))) \lambda u. x) \lambda u. u) \\ & \lambda f. \lambda x. (f (f x)))) f) x) \end{aligned}$$
[illegible][illegible][illegible]





[illegible][illegible][illegible]



$\lambda f. \lambda x. ((((((\lambda x_1. \lambda x_2. ((((\lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 (x_1 x_2)) \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) \lambda g. \lambda h. (h (g \lambda x_1. \lambda x_1. \lambda y. y)) \lambda u. \lambda x_1. \lambda y. x_1) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 x_2)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n (m x_1)) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 (x_1 x_2)))))) (\lambda x_1. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) n)) \lambda x_1. \lambda y. x_1) n)) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 x_2)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n (m x_1)) n) (h (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) n)))) (x_1 x_1)) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) \lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 (x_1 x_2)))))) f) \lambda n. (((\lambda x. \lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((\lambda n. \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x) n)) \lambda f. \lambda x. (f x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n (m f)) n) (h (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x) \lambda u. u) n)))) (x x) \lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. ((\lambda n. \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x) n)) \lambda f. \lambda x. (f x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n (m f)) n) (h (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x) \lambda u. u) n)))) (x x) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) n)))) (x_1 x_1)) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 x_2)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n (m x_1)) n) (h (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 (x_1 x_2)))))) f) \lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 (x_1 x_2)))) f)$

[illegible]
$$\lambda f. \lambda x. ((((((\lambda g. \lambda h. (h (g \lambda g. \lambda h. (h (g \lambda x_1. \lambda x_1. \lambda y. y)))) (\lambda g. \lambda h. (h (g \lambda g. \lambda h. (h (g \lambda x_1. \lambda x_1. \lambda y. y)))) \lambda u. \lambda u. \lambda x_1. \lambda y. x_1)) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 x_2)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n (m x_1)) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) \lambda u. u) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((n \lambda g. \lambda h. (h (g x_1))) \lambda u. x_2) u) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 x_2) (x_1 (x_1 x_2)) ((\lambda x_1. (\lambda h. \lambda h. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c a_1) a_2) (\lambda n. (\lambda x_1. \lambda x_1. \lambda y. y) \lambda x_1. (h (g x_1))) \lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 x_2)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n (m x_1)) n) (h (\lambda n. \lambda a_1. \lambda a_2. ((n a_1) a_2))))))))))))))$$







[illegible]

$\lambda f. \lambda x. ((\lambda x_1. \lambda x_2. (x_1 \ x_2) \ f) \ \lambda u. (((\lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) \ (\lambda n. ((\lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \ \lambda x. \lambda y. x) \ n)) \ \lambda f. \lambda x. (f \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n \ (m \ f)) \ n) \ (h \ (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((\lambda g. \lambda h. (h \ (g \ f))) \ \lambda u. x \ \lambda u. u) \ n))) \ (x \ x) \ (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) \ (\lambda n. ((\lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \ \lambda x. \lambda y. x) \ n)) \ \lambda f. \lambda x. (f \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda f. (n \ (m \ f)) \ n) \ (\lambda n. \lambda f. \lambda x. (((\lambda g. \lambda h. (h \ (g \ f))) \ \lambda u. x \ \lambda u. u) \ n))) \ (x \ x))) \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((\lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1))) \ \lambda u. x \ \lambda u. u) \ \lambda x_1. \lambda x_2. (\lambda x_1 \ (x_1 \ x_2) \ x_1))) \ f) \ x)) ((\lambda x_1. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) \ (\lambda n. ((\lambda x_1. \lambda x_1. \lambda y. y) \ \lambda x_1. \lambda y. y) \ \lambda x_1. \lambda y. y) \ \lambda x_1. \lambda x_2. (\lambda x_1 \ x_2) \ (\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. ((n \ (m \ x_1)) \ n) \ (h \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((\lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1))) \ \lambda u. x_2 \ \lambda u. u) \ n))) \ (x_1 \ x_1) \ \lambda x_1. ((\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) \ (\lambda n. ((\lambda x_1. \lambda x_1. \lambda y. y) \ \lambda x_1. \lambda y. y) \ \lambda x_1. \lambda x_2. (\lambda x_1 \ x_2) \ (\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. ((n \ (m \ x_1)) \ n) \ (h \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((\lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1))) \ \lambda u. x_2 \ \lambda u. u) \ n))) \ (x_1 \ x_1))) \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((\lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1))) \ \lambda u. x_2 \ \lambda u. u) \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x_2. (((\lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1))) \ \lambda u. x_2 \ \lambda u. u) \ \lambda x_1. \lambda x_2. (\lambda x_1 \ x_2) \ x_1))) \ f)))$

[illegible]
$$\lambda f. \lambda x. (f \text{ (((} (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) (\lambda n. ((n \ \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \ \lambda x. \lambda y. x) \ n)) \ \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n \ (m \ x_1)) \ n) \ (h \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1)) \ \lambda y. u) \ n))) \ (\lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) (\lambda n. ((n \ \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \ \lambda x. \lambda y. x) \ n)) \ \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n \ (m \ x_1)) \ n) \ (h \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1)) \ \lambda y. u) \ n))) \ (x \ x)) \ \lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) (\lambda n. ((n \ \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \ \lambda x. \lambda y. x) \ n)) \ \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \ x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n \ (m \ x_1)) \ n) \ (h \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1)) \ \lambda y. u) \ n))) \ (x \ x))))) \ (\lambda n. \lambda x. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1)) \ \lambda y. u) \ n))) \ (x \ x)))) \ (\lambda n. \lambda x. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1)) \ \lambda y. u) \ n))) \ \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \ x))) \ f) \ x)$$
$$\lambda f. \lambda x. (f \text{ } (((((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \ a_1) \ a_2) \ (\lambda n. ((n \ \lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \ \lambda x. \lambda y. x) \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1))) \ \lambda u. x) \ \lambda u. u) \ \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \ (x_1 \ x)))))) \ \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \ x)) \ ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n \ (m \ x_1)) \ (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \ \lambda g. \lambda h. (h \ (g \ x_1))) \ \lambda u. x) \ \lambda u. u) \ \lambda x_1.$$

$$\lambda f. \lambda x. (f \text{ (((((}\lambda h. (h \text{ ((}\lambda g. \lambda h. (h \text{ (g } \lambda x. \lambda x. \lambda y. y)) \lambda u. \lambda x. \lambda y. x) \lambda x. \lambda x. \lambda y. y)) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \text{ } x)) ((\lambda n. \lambda m. (\lambda x_1. (n \text{ } m) \text{ } x_1)) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \text{ } g. \lambda h. (h \text{ (g } x_1)) \lambda u. x) \lambda u. \lambda x_1) \lambda x. (x_1 \text{ } x_1 \text{ } x)) ((\lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda a_1. \lambda a_2. ((c_1 \text{ } a_2) \lambda_2) (\lambda n. ((\lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \text{ } x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n \text{ } m) \text{ } x_1) \text{ } n) (h \text{ } \lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \text{ } g. \lambda h. (h \text{ (g } x_1))) \lambda u. x) \lambda u. u) \text{ } n)))) (x \text{ } x) \lambda x. (\lambda h. \lambda n. (((\lambda c. \lambda a_1. \lambda a_2. ((c \text{ } a_1) \text{ } a_2) (\lambda n. ((\lambda x. \lambda x. \lambda y. y) \lambda x. \lambda y. x) \text{ } n)) \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \text{ } x)) ((\lambda n. \lambda m. \lambda x_1. (n \text{ } m) \text{ } x_1) \text{ } n) (h \text{ } \lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \text{ } g. \lambda h. (h \text{ (g } x_1)) \lambda u. x) \lambda u. u) \text{ } n)))) (x \text{ } x) (\lambda n. \lambda x. (((\lambda x_1. \lambda h. (h \text{ (g } x_1)) \lambda u. x) \lambda u. u) (\lambda n. \lambda x_1. \lambda x. (((n \text{ } g. \lambda h. (h \text{ (g } x_1)) \lambda u. x) \lambda u. u) \lambda x_1. \lambda x. (x_1 \text{ } x_1 \text{ } x)))))) f \text{ } x))$$



[illegible]











