DATENBANKEN VORLESUNG

Wiederholung Mengen, Relationen aus der Mathematik

Eva-Maria Iwer
22.04.2021

Was ist eine Menge?

Schwierige Frage!
Wir begnügen uns mit einer „naiven“ Mengendefinition.

Der „Vater der Mengenlehre“, Georg Cantor (1845 - 1918), sagte:
*„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“*

Anstatt genau zu sagen, was eine Menge ist, stellen wir dar, wie man Mengen beschreiben kann. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten.
1. Durch Aufzählung
2. Durch Eigenschaften

Hochschule RheinMain

Beschreibung durch Aufzählung

Die Objekte einer Menge heißen **Elemente**. Wir können eine Menge beschreiben, indem wir ihre Elemente aufzählen.

Beispiel: {rot, grün, blau} ist die Menge der Farben rot, grün und blau.

Beispiel: Die Menge {Susanne, Yvonne, Ute, Nicole} besteht aus den Elementen Susanne, Yvonne, Ute, Nicole.

Beispiel: Wir betrachten oft Mengen von Zahlen:
$M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist die Menge der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.

Notationen

Die Elemente der Menge werden in geschweifte Klammern geschrieben:

a, b, c sind die Elemente der Menge {a, b, c}.

Bei einer Menge spielt die Reihenfolge der Elemente keine Rolle:

{c, a, b} = {b, a, c} = {a, b, c}.

In einer Menge werden Elemente, die mehrfach auftauchen, nur einmal betrachtet:

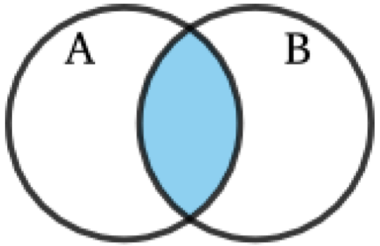
{a, a, a, a, b, b, b, c, c, c, c, c, c, c, c} = {a, b, c}.

Schnittmenge

In der **Schnittmenge $A \cap B$** zweier Mengen A und B liegen genau die Elemente, die in A und in B liegen:

$$A \cap B = \{m \mid m \in A \wedge m \in B\}.$$

Darstellung im **Venn-Diagramm**:



$A \cap B$

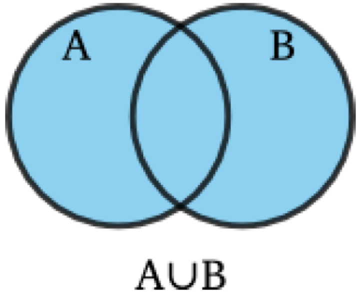
Beispiel: A = Menge der Biologiestudenten, B = Menge der Mathematikstudenten. Dann ist $A \cap B$ die Menge der Studenten, die sowohl Bio als auch Mathe studieren.

Vereinigungsmenge

In der **Vereinigungsmenge $A \cup B$** zweier Mengen A und B liegen genau die Elemente, die in A oder in B liegen:

$$A \cup B = \{m \mid m \in A \vee m \in B\}.$$

Darstellung im Venn-Diagramm:



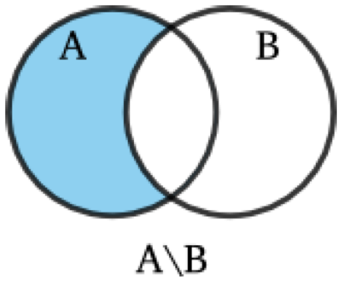
Beispiel: A = Menge der Biologiestudenten, B = Menge der Mathematikstudenten. Dann ist $A \cup B$ die Menge der Studenten, die Bio oder Mathe (oder beides!) studieren.

Differenzmenge

In der **Differenzmenge A \ B** („A ohne B“) zweier Mengen A und B liegen genau die Elemente, die in A, aber nicht in B liegen:

$$A \setminus B = \{m \mid m \in A \wedge m \notin B\}.$$

Darstellung im Venn-Diagramm:



Beispiele: (a) {rot, blau, gelb} \ {grün, weiß, rot} = {blau, gelb}

(b) **Z** \ Menge der geraden Zahlen = Menge der ungeraden Zahlen

Bemerkung: Man darf A \ B auch dann bilden, wenn B keine Teilmenge von A ist.

Das kartesische Produkt

Definition. Für zwei nichtleere Mengen A und B definieren wir das **kartesische Produkt $A \times B$** (auch **Kreuzprodukt**, gesprochen: „A kreuz B“) als die Menge aller Paare, von denen der erste Teil aus A, der zweite aus B kommt:

$$\mathbf{A \times B} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Außerdem definieren wir für jede Menge A ihr kartesisches Produkt mit der leeren Menge $\varnothing$ wie folgt:

$$A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A.$$

Das allgemeine kartesische Produkt

Definition. Seien $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nichtleere Mengen, dann ist das **kartesische Produkt** dieser Mengen definiert durch:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \ldots, m_n \in M_n\}$$

Die Elemente von $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ heißen **n-Tupel**. Statt 2-Tupel sagt man **Paar**, statt 3-Tupel sagt man **Tripel**.

Wenn (mind.) eine der Mengen M_i die leere Menge $\emptyset$ ist, so ist das kartesische Produkt ebenfalls die leere Menge $\emptyset$.

Relationen

Beispiel: Wir betrachten die beiden Mengen

A = {Dick, Bonnie, Maja}, B = {Doof, Clyde, Alice, Willi}.

Wir wissen: Das **kartesische Produkt** enthält *alle* Paare:

A × B = {(Dick, Doof), (Dick, Clyde), (Dick, Alice), (Dick, Willi),
(Bonnie, Doof), (Bonnie, Clyde), (Bonnie, Alice), (Bonnie, Willi),
(Maja, Doof), (Maja, Clyde), (Maja, Alice), (Maja, Willi)}

Möchte man nur *bestimmte* Paare zulassen (die in einer bestimmten Beziehung bzw. „**Relation**" zueinander stehen), muss man das kartesische Produkt auf eine *Teilmenge* einschränken.

Relationen

Definition. Eine **Relation** zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$.

Beispiel: Die Relation R zwischen den obigen Mengen, die alle „berühmten“ Paare enthält, ist

$$R = \{(\text{Dick}, \text{Doof}), (\text{Bonnie}, \text{Clyde}), (\text{Maja}, \text{Willi})\} \subseteq A \times B.$$